Questions de cours

Intégrales impropres et début de l'algèbre bilinéaire

1 L'intégrale de Gauss

Convergence. La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est continue et **paire** sur $\mathbb{R}$: il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$. Sur $[0,1]$, la fonction est continue sur un segment. En $+\infty$, par croissances comparées, $t^2 e^{-t^2/2} \to 0$, donc $e^{-t^2/2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (Riemann), $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge. Par parité, $\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

Valeur (admise).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}, \qquad \text{donc} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

2 La fonction Gamma

Définition. Pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Relation fonctionnelle. Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Valeurs entières. $\Gamma(1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

> Décalage d'indice : $\Gamma(n) = (n-1)!$, pas $n!$. Par exemple $\Gamma(2) = 1$ et $\Gamma(3) = 2$.

3 Exemples de produits scalaires (exemples page 2)

Produits scalaires usuels (sans justification) :

- sur $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$;
- sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X, Y\rangle = {}^tX\,Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;
- sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tA\,B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,b_{i,j}$;
- sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, avec $a < b$: $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.

> Sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, il faut $a < b$ et des fonctions continues : c'est ce qui donne le caractère défini ($\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$).

4 Inégalité de Cauchy-Schwarz ; inégalité triangulaire (Prop. 2, 3)

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Cauchy-Schwarz. Pour tous $x, y \in E$:

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \qquad \big(\text{soit } \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle\big).$$

- **Égalité avec la valeur absolue :** $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \, \|y\| \iff$ la famille (x, y) est liée.
- **Égalité sans la valeur absolue :** $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \iff x = 0_E$ ou il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$ (vecteurs positivement liés).

Inégalité triangulaire. Pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, avec égalité si et seulement si $x = 0_E$ ou il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$.

5 Théorème de Pythagore (Prop. 4)

Théorème. Pour tous $x, y \in E$: $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Généralisation. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux orthogonaux, alors

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

> Pour $n \geqslant 3$, la réciproque est fausse : l'égalité des carrés des normes ne garantit pas que les vecteurs soient deux à deux orthogonaux.

6 Coordonnées dans une base orthonormée (Prop. 8, point 1)

Soient E un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Pour tout $x \in E$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$

Autrement dit, la i-ème coordonnée de x dans cette base est $\langle x, e_i \rangle$.

> Cette formule n'est vraie que dans une base **orthonormée**.