Exercices traités

Intégrales impropres et début de l'algèbre bilinéaire

1 Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln t \,\mathrm{d}t$, pour $\alpha > -1$ (ex. 14, q. 2)

Idée. Intégration par parties sur un segment $[x, 1]$, puis limite quand $x \to 0^+$.

Rédaction. $t \mapsto t^\alpha \ln t$ est continue sur $]0, 1]$: l'intégrale est impropre en 0. Soit $x \in]0, 1]$. Avec $u(t) = \ln t$, $v(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, 1]$, et $\alpha + 1 \neq 0$) :

$$\int_x^1 t^\alpha \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}\ln t}{\alpha+1}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^\alpha}{\alpha+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} - \frac{1 - x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}.$$

Limite. Comme $\alpha + 1 > 0$: $x^{\alpha+1} \to 0$ et $x^{\alpha+1}\ln x \to 0$ quand $x \to 0^+$ (croissances comparées). Le membre de droite a donc une limite finie.

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$.

2 Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ (ex. 14, q. 1)

Rédaction. $t \mapsto e^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$; l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$: on coupe en 0.

Sur $[0, +\infty[$ *:* pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Sur $]-\infty, 0]$ *:* la fonction est paire, donc $\int_{-\infty}^0 e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge aussi et vaut 1 (changement de variable affine $t \mapsto -t$).

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t = 2$.

> Il faut la convergence des **deux** moitiés séparément ; calculer $\int_{-x}^{x}$ puis faire $x \to +\infty$ ne suffit pas en général.

3 Existence de $\Gamma(x)$ et relation $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ (ex. 10)

Existence. Soit $x > 0$. $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$; on coupe en 1.

- *En* 0 *:* $f(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, avec $1 - x < 1$ car $x > 0$: $\int_0^1 f$ converge (équivalents et Riemann).
- *En* $+\infty$ *:* $t^2 f(t) = t^{x+1}e^{-t} \to 0$ (croissances comparées), donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$: $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Relation. Pour $0 < \varepsilon < A$, intégration par parties avec $u(t) = t^x$, $v(t) = -e^{-t}$ (de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$) :

$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - A^x e^{-A} + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$ (car $x > 0$) et $A \to +\infty$ (croissances comparées), les crochets tendent vers 0 et les intégrales vers $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

4 Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u=\sqrt{t}$ (ex. 5, q. 3)

Changement de variable. $t\mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. On pose $t=\varphi(u)=u^2$: φ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, avec $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$. Les intégrales suivantes sont donc de même nature, et égales en cas de convergence :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} 2u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u=2\int_0^{+\infty} u^{2-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u=2\,\Gamma(2).$$

Conclusion. $\Gamma(2)$ converge et vaut $1!=1$.

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=2$.

5 $(A,B)\mapsto \mathrm{tr}({}^tA\,B)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (exemple 4, page 2)

Notons $\varphi(A,B)=\mathrm{tr}({}^tA\,B)$ pour $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: c'est bien un réel.

- *Symétrie :* une matrice et sa transposée ont même trace, donc $\varphi(B,A)=\mathrm{tr}({}^tB\,A)=\mathrm{tr}\left({}^t({}^tA\,B)\right)=\mathrm{tr}({}^tA\,B)=\varphi(A,B)$.
- *Linéarité à droite :* pour $B,C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(A,\lambda B+C)=\mathrm{tr}(\lambda\,{}^tAB+{}^tAC)=\lambda\,\varphi(A,B)+\varphi(A,C)$ (distributivité du produit, linéarité de la trace). Par symétrie, φ est aussi linéaire à gauche : elle est **bilinéaire**.
- *Positivité :* $({}^tA\,A)_{j,j}=\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2$, donc $\varphi(A,A)=\displaystyle\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2\geqslant 0$.
- *Caractère défini :* si $\varphi(A,A)=0$, cette somme de carrés est nulle, donc tous les $a_{i,j}$ sont nuls : $A=0$.

φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6 $(P,Q)\mapsto\int_0^{+\infty}P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$ (exemple 6, page 2)

Bonne définition. PQ est un polynôme $\sum_{k=0}^m c_kX^k$, et pour tout k, $\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}\,\mathrm{d}t=\Gamma(k+1)$ converge. Par linéarité, $\varphi(P,Q)=\int_0^{+\infty}P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\sum_{k=0}^m c_k\,k!$.

- *Symétrie :* $P(t)Q(t)=Q(t)P(t)$, donc $\varphi(P,Q)=\varphi(Q,P)$.
- *Bilinéarité :* $\varphi(P,\lambda Q+R)=\lambda\,\varphi(P,Q)+\varphi(P,R)$ par linéarité des intégrales convergentes ; par symétrie, linéarité à gauche.
- *Positivité :* $\varphi(P,P)=\int_0^{+\infty}P(t)^2e^{-t}\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ (intégrande positif).
- *Caractère défini :* si $\varphi(P,P)=0$, alors pour tout $A>0$, $0\leqslant\int_0^A P(t)^2e^{-t}\,\mathrm{d}t\leqslant\varphi(P,P)=0$. La fonction $t\mapsto P(t)^2e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,A]$: elle y est nulle. Donc $P(t)=0$ pour tout $t\geqslant 0$: P a une infinité de racines, $P=0$.

φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

7 Une inégalité de Cauchy-Schwarz en probabilités (ex. 8)

Énoncé. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, \mathbb{P}(X = x_i)$, et interpréter.

Rédaction. Notons $p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \geqslant 0$, avec $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, posons $u = (x_1\sqrt{p_1}, \dots, x_n\sqrt{p_n})$ et $v = (\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$. Cauchy-Schwarz donne $\langle u, v\rangle^2 \leqslant \|u\|^2 \|v\|^2$, c'est-à-dire

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p_i.$$

Interprétation. Par le théorème de transfert, l'inégalité s'écrit $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$.

On retrouve $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geqslant 0$ (formule de König-Huygens).

8 Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (Prop. 5)

Énoncé. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E. Montrer qu'elle est libre.

Rédaction. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E$. Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on fait le produit scalaire avec u_j :

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, \; u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, u_j\rangle = \lambda_j \|u_j\|^2,$$

car $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$. Comme $u_j \neq 0_E$, $\|u_j\|^2 > 0$, donc $\lambda_j = 0$.

Tous les λ_j sont nuls : la famille est libre.