Questions de cours

Révisions sur les intégrales impropres

1 Comparaison et équivalents pour les fonctions positives

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$, et f, g deux fonctions **continues** sur $[a, b[$.

Théorème de comparaison. Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$, alors :

- si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$) ;
- si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Règle des équivalents. Si f et g sont **positives** sur $[a, b[$ et $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

> Ces deux résultats exigent des fonctions positives (au moins au voisinage de la borne étudiée). Énoncés analogues pour une intégrale impropre en a, sur $]a, b]$.

2 Intégrales de Riemann

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a < b$ réels :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1 \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1 \qquad \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1$$

> Pour $\alpha = 1$, toutes ces intégrales divergent. En particulier $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge pour tout α.

3 Convergence absolue ; règle de négligeabilité

Soient $a < b$, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et f, g continues sur $[a, b[$.

Définition. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème. Une intégrale absolument convergente est convergente, et alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

Règle de négligeabilité. Si g est **positive** sur $[a, b[$, si $f(t) \underset{t\to b}{=} o\big(g(t)\big)$ et si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

> Usage typique en $+\infty$: montrer que $t^2 f(t) \to 0$, c'est-à-dire $f(t) = o\big(\frac{1}{t^2}\big)$, puis conclure avec Riemann ($2 > 1$).

4 L'intégrale de Gauss

Convergence. La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est continue et **paire** sur $\mathbb{R}$: il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$. Sur $[0, 1]$, la fonction est continue sur un segment. En $+\infty$, par croissances comparées, $t^2 e^{-t^2/2} \to 0$, donc $e^{-t^2/2} = o\big(\frac{1}{t^2}\big)$; comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (Riemann), $\int_1^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge. Par parité, $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

Valeur (admise).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}, \qquad \text{donc} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

5 La fonction Gamma

Définition. Pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Relation fonctionnelle. Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Valeurs entières. $\Gamma(1) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

> Décalage d'indice : $\Gamma(n) = (n-1)!$, pas $n!$. Par exemple $\Gamma(2) = 1$ et $\Gamma(3) = 2$.