Exercices traités

Révisions sur les intégrales impropres

1 Convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ (ex. 3, q. 2)

Idée. L'intégrale n'est impropre qu'en apparence : la fonction se prolonge par continuité aux deux bornes.

Rédaction. $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$ (quotient, $\ln t \neq 0$).

- *En 0^+ :* $t-1 \to -1$ et $\ln t \to -\infty$, donc $f(t) \to 0$.
- *En 1^- :* avec $u = t-1 \to 0$, $\ln t = \ln(1+u) \sim u = t-1$, donc $f(t) \to 1$.

f se prolonge donc en une fonction continue sur le segment $[0,1]$ (valeurs 0 en 0 et 1 en 1).

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre : elle converge.

2 Convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)(\sin t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ (ex. 9, q. 1)

Idée. La fonction change de signe : on montre la convergence absolue.

Rédaction. $f : t \mapsto \frac{(\ln t)(\sin t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$, et pour $t \geqslant 1$:

$$0 \leqslant |f(t)| \leqslant \frac{\ln t}{t^2}.$$

Or $t^{3/2} \cdot \dfrac{\ln t}{t^2} = \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (croissances comparées), donc $\dfrac{\ln t}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$ converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$), $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (négligeabilité, fonctions positives), puis $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge (comparaison).

L'intégrale est absolument convergente, donc convergente.

> On ne peut pas utiliser directement la comparaison ou les équivalents sur f : elle n'est pas de signe constant.

3 Calcul de $\Gamma(1/2)$ par changement de variable (ex. 13)

Énoncé. Justifier la convergence de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et la calculer.

Convergence. La fonction est continue et positive sur $]0,+\infty[$. En 0 : $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{t^{1/2}}$, et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1/2}}$ converge (Riemann, $\frac{1}{2} < 1$). En $+\infty$: $t^2 \cdot \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = t^{3/2}e^{-t} \to 0$, donc la fonction est $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, intégrable sur $[1,+\infty[$.

Changement de variable $t = \frac{u^2}{2}$. $\varphi : u \mapsto \frac{u^2}{2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, avec $\mathrm{d}t = u\,\mathrm{d}u$ et $\sqrt{t} = \frac{u}{\sqrt{2}}$. Les deux intégrales sont de même nature et égales :

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{u}\, e^{-u^2/2}\, u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

4 Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln t \,\mathrm{d}t$, pour $\alpha > -1$ (ex. 14, q. 2)

Idée. Intégration par parties sur un segment $[x, 1]$, puis limite quand $x \to 0^+$.

Rédaction. $t \mapsto t^\alpha \ln t$ est continue sur $]0, 1]$: l'intégrale est impropre en 0. Soit $x \in]0, 1]$. Avec $u(t) = \ln t$, $v(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, 1]$, et $\alpha + 1 \neq 0$) :

$$\int_x^1 t^\alpha \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}\ln t}{\alpha+1}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^\alpha}{\alpha+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} - \frac{1 - x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}.$$

Limite. Comme $\alpha + 1 > 0$: $x^{\alpha+1} \to 0$ et $x^{\alpha+1}\ln x \to 0$ quand $x \to 0^+$ (croissances comparées). Le membre de droite a donc une limite finie.

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$.

5 Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ (ex. 14, q. 1)

Rédaction. $t \mapsto e^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$; l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$: on coupe en 0.

Sur $[0, +\infty[$ *:* pour $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Sur $]-\infty, 0]$ *:* la fonction est paire, donc $\int_{-\infty}^0 e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$ converge aussi et vaut 1 (changement de variable affine $t \mapsto -t$).

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t = 2$.

> Il faut la convergence des **deux** moitiés séparément ; calculer $\int_{-x}^{x}$ puis faire $x \to +\infty$ ne suffit pas en général.

6 Existence de $\Gamma(x)$ et relation $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ (ex. 10)

Existence. Soit $x > 0$. $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$; on coupe en 1.

- *En* 0 *:* $f(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, avec $1 - x < 1$ car $x > 0$: $\int_0^1 f$ converge (équivalents et Riemann).
- *En* $+\infty$ *:* $t^2 f(t) = t^{x+1}e^{-t} \to 0$ (croissances comparées), donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$: $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Relation. Pour $0 < \varepsilon < A$, intégration par parties avec $u(t) = t^x$, $v(t) = -e^{-t}$ (de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$) :

$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - A^x e^{-A} + x\int_\varepsilon^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$ (car $x > 0$) et $A \to +\infty$ (croissances comparées), les crochets tendent vers 0 et les intégrales vers $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

7 **Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u=\sqrt{t}$** (ex. 5, q. 3)

Changement de variable. $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. On pose $t=\varphi(u)=u^2$: φ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante, bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, avec $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$. Les intégrales suivantes sont donc de même nature, et égales en cas de convergence :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} u^{2-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2\,\Gamma(2).$$

Conclusion. $\Gamma(2)$ converge et vaut $1! = 1$.

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2$.