Exercices traités

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1 Injectivité et noyau (Prop. 32, révisions d'algèbre linéaire)

Énoncé. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que f est injective $\iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

($\Rightarrow$) On a toujours $0_E \in \operatorname{Ker} f$ car $f(0_E) = 0_F$. Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$, donc $x = 0_E$ par injectivité. D'où $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité, $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0_F$, donc $x - y \in \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, soit $x = y$. **f est injective.**

2 Interpolation de Lagrange (ex. 10.2, révisions d'algèbre linéaire)

Énoncé. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer que $f : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un isomorphisme.

Linéarité. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda P + Q)(\alpha_i) = \lambda P(\alpha_i) + Q(\alpha_i)$ pour tout i, donc $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.

Injectivité. Si $P \in \operatorname{Ker} f$, alors $P(\alpha_0) = \cdots = P(\alpha_n) = 0$: P a $n+1$ racines distinctes et $\deg P \leqslant n$, donc $P = 0$. Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Conclusion. f est linéaire, injective, et $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$: **f est un isomorphisme.**

> **Interprétation.** Par $n+1$ points (α_i, β_i) d'abscisses distinctes passe le graphe d'**un unique** polynôme de degré $\leqslant n$ (surjectivité = existence, injectivité = unicité). Pour $n = 1$: par deux points passe une unique droite.

3 $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$; trace de matrices semblables (Prop. 10)

Calcul. Pour $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$, donc, en échangeant les deux sommes finies :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = \operatorname{tr}(BA).$$

Conséquence. Si $B = P^{-1}AP$, on applique la formule à P^{-1} et AP : $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}(AP)\right) = \operatorname{tr}\left((AP)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}(A)$. **Deux matrices semblables ont même trace.**

> La réciproque est fausse : I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont même trace, mais seule I_2 est semblable à I_2.

4 Spectre de la dérivation (ex. 4.2)

Sur $\mathbb{R}[x]$: $D(P) = P'$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \neq 0$ tels que $P' = \lambda P$.

- Si $\lambda \neq 0$: $\deg(\lambda P) = \deg P$, alors que $\deg P' < \deg P$ (ou $P' = 0$). Contradiction : λ n'est pas valeur propre.
- Si $\lambda = 0$: $P' = 0 \iff P$ constant. Les constantes non nulles sont des vecteurs propres.

Donc $\mathrm{Sp}(D) = \{0\}$ et $E_0(D) = \mathbb{R}_0[x]$.

Sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$: soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f' = \lambda f$, posons $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$: $g' = (f' - \lambda f)e^{-\lambda x} = 0$, donc g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $f = Ce_\lambda$, où $e_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$. Réciproquement $e_\lambda' = \lambda e_\lambda$ et $e_\lambda \neq 0$.

Tout réel est valeur propre : $\mathrm{Sp}(D) = \mathbb{R}$, et $E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}(e_\lambda)$.

5 Spectre d'une matrice triangulaire (Prop. 14 ; ex. 4.6)

Énoncé. Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire, de coefficients diagonaux $t_{1,1}, \dots, t_{n,n}$. Déterminer $\mathrm{Sp}(T)$.

Rédaction. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $T - \lambda I_n$ est encore triangulaire, de coefficients diagonaux $t_{i,i} - \lambda$. Or une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Donc

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \iff T - \lambda I_n \text{ non inversible} \iff \exists\, i \in [\![1,n]\!],\ \lambda = t_{i,i}.$$

$\mathrm{Sp}(T) = \{t_{1,1}, \dots, t_{n,n}\}$: les valeurs propres se lisent sur la diagonale.

Exemple : $\mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \{1, 4\}$ (une valeur répétée ne compte qu'une fois).

6 Spectre de S grâce à S^2 (ex. 4.9)

Énoncé. $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Sp}(S)$ en commençant par calculer S^2.

Calcul de S^2. Avec $(E_1, \dots, E_4)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on lit sur les colonnes : $SE_1 = \frac{1}{3}E_4$, $SE_2 = \frac{1}{2}E_3$, $SE_3 = 2E_2$, $SE_4 = 3E_1$. Donc $S^2E_1 = \frac{1}{3}\cdot 3E_1 = E_1$, $S^2E_2 = \frac{1}{2}\cdot 2E_2 = E_2$, et de même $S^2E_3 = E_3$, $S^2E_4 = E_4$: $S^2 = I_4$.

Candidats. $Q = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est annulateur de S, donc $\mathrm{Sp}(S) \subset \{-1, 1\}$.

Test. Pour $X = (a,b,c,d)^T$: $SX = X \iff (3d, 2c, b/2, a/3) = (a,b,c,d) \iff a = 3d$ et $b = 2c$, et $SX = -X \iff a = -3d$ et $b = -2c$. Ainsi

$$E_1(S) = \mathrm{Vect}\left((3,0,0,1)^T, (0,2,1,0)^T\right), \qquad E_{-1}(S) = \mathrm{Vect}\left((3,0,0,-1)^T, (0,2,-1,0)^T\right).$$

Ces sous-espaces ne sont pas réduits à $\{0\}$: $\mathrm{Sp}(S) = \{-1, 1\}$.

7 Endomorphismes qui commutent (ex. 8)

Énoncé. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

Rédaction. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et $x \in E_\lambda(f)$, c'est-à-dire $f(x) = \lambda x$. Alors, par linéarité de g :

$$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = g(\lambda x) = \lambda\, g(x),$$

donc $g(x) \in E_\lambda(f)$. **Ainsi $g\big(E_\lambda(f)\big) \subset E_\lambda(f)$.**

> On ne dit pas « $g(x)$ est un vecteur propre » : $g(x)$ peut être nul. On montre seulement qu'il appartient à $E_\lambda(f)$.

8 Étudier la diagonalisabilité de deux matrices (ex. 5.1 et 5.5)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A est triangulaire : $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$.

Dans $A - 2I_4$, la première colonne est nulle et les trois autres forment une famille échelonnée, donc libre : $\mathrm{rg}(A - 2I_4) = 3$, d'où $\dim E_2(A) = 4 - 3 = 1 < 4$.

A n'est pas diagonalisable (Prop. 23).

Variante : si $A = P(2I_4)P^{-1}$, alors $A = 2I_4$, ce qui est faux.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B est triangulaire : $\mathrm{Sp}(B) = \{2, 3\}$.

- $B - 2I_4$ a deux colonnes nulles et deux colonnes $(0,0,1,0)^T$, $(0,0,1,1)^T$ libres : rang 2, donc $\dim E_2(B) = 2$.
- $B - 3I_4$ a pour colonnes $-E_1, -E_2, 0, E_3$: rang 3, donc $\dim E_3(B) = 1$.

$\dim E_2(B) + \dim E_3(B) = 3 < 4$: **B n'est pas diagonalisable.**

Méthode : on lit le spectre sur la diagonale, puis on calcule $\dim E_\lambda = 4 - \mathrm{rg}(M - \lambda I_4)$ avec le théorème du rang.

9 Une matrice symétrique d'ordre 2 est diagonalisable (ex. 5.7)

Énoncé. Démontrer que toute matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Cas $b = 0$. A est diagonale, donc diagonalisable.

Cas $b \neq 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, une matrice d'ordre 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, donc

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \iff (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = 0 \iff \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2 = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme vaut

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 > 0 \quad (\text{car } b \neq 0).$$

Il y a donc deux racines réelles distinctes : A a deux valeurs propres distinctes, en dimension 2.

Par la condition suffisante (Prop. 22), A est diagonalisable.