Questions de cours

Algèbre linéaire et début de la réduction

1 Somme, somme directe ; concaténation de bases ; dimension (Déf. 1, 2, Prop. 3, 4)

Soient E un espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- **Somme :** $F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \,;\, (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\}$ (c'est un sous-espace vectoriel de E).
- **Somme directe :** la somme est directe si tout $x \in F_1 + \cdots + F_p$ s'écrit **de façon unique** $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in F_i$. On la note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Proposition 3 (concaténation de bases). On suppose chaque F_i de dimension finie, de base $\mathscr{B}_i$ ($\mathscr{B}_i = \varnothing$ si $F_i = \{0_E\}$), et on note $\mathscr{F}$ la famille obtenue en concaténant $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$. Alors

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \iff E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p.$$

Proposition 4 (dimension). Si $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe et de dimension finie :
$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$.

> Pour $p \geqslant 3$, avoir $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour tous $i \neq j$ ne suffit pas : trois droites distinctes du plan ne sont pas en somme directe.

2 Matrices semblables (Déf. 4, Prop. 8)

Définition. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ **inversible** telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 8 (caractérisation). Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent **un même endomorphisme** dans deux bases. Précisément : soient E de dimension $n \geqslant 1$, $\mathscr{B}$ une base de E, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Pour $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\left[\exists\, \mathscr{B}' \text{ base de } E,\ B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\right] \iff A \text{ et } B \text{ sont semblables.}$$

3 Formules de changement de base (Déf. 3, Prop. 6, 7)

Matrice de passage. Soient E de dimension $n \geqslant 1$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de la **nouvelle** base $\mathscr{B}'$ dans l'**ancienne** base $\mathscr{B}$:

$$P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} e'_1 & \cdots & e'_n \\ & & \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array} \qquad (\text{inversible, d'inverse } P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}).$$

Vecteur (Prop. 6). Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors $X = PX'$ (anciennes coordonnées en fonction des nouvelles).

Endomorphisme (Prop. 7). Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, alors $A' = P^{-1}AP$.

4 Valeurs propres, vecteurs propres ; caractérisations (Déf. 6–8, Prop. 12)

Soient E un espace vectoriel (de dimension quelconque) et $f \in \mathscr{L}(E)$.

- $\lambda \in \mathbb{R}$ est une **valeur propre** de f s'il existe $x \in E$, $x \neq 0_E$, tel que $f(x) = \lambda x$.
- $x \in E$ est un **vecteur propre** de f si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
- **Spectre** $\mathrm{Sp}(f)$: ensemble des valeurs propres. **Sous-espace propre** associé à $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$: $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$.
- **Matrice** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: même chose avec $AX = \lambda X$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$; $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.

Proposition 12. Si $\dim E = n \geqslant 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$;
- $\mathrm{Ker}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$;
- $f - \lambda \,\mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif (de façon équivalente : pas bijectif, pas surjectif) ;
- $\mathrm{rg}(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E) < n$.

Matriciellement : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_n$ n'est pas inversible $\iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

> Un vecteur propre n'est jamais nul, mais une valeur propre peut être nulle : $0 \in \mathrm{Sp}(f) \iff \mathrm{Ker}\, f \neq \{0_E\}$.

5 Polynôme annulateur et valeurs propres (Déf. 9, 10, Prop. 17)

Définition. Un polynôme $Q = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est **annulateur** de $f \in \mathscr{L}(E)$ si $Q(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (avec $f^0 = \mathrm{Id}_E$) ; il est annulateur de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si $Q(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = 0_n$ (avec $A^0 = I_n$).

Proposition 17. Si Q est un polynôme annulateur de f (ou de A), toute valeur propre est racine de Q :

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} \qquad \big(\text{resp. } \mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\}\big).$$

> La réciproque est fausse : pour un projecteur p, $X(X-1)(X-2)$ est annulateur, mais $2 \notin \mathrm{Sp}(p)$. On obtient seulement des **candidats**, qu'il faut ensuite tester.

6 Conditions de diagonalisabilité (Prop. 22, 23)

Soient E de dimension finie $n \geqslant 1$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. ($f$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ; A l'est si elle est semblable à une matrice diagonale.)

Condition suffisante (Prop. 22). $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = n \implies A$ diagonalisable (de même $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(f)) = \dim E \implies f$ diagonalisable). Les sous-espaces propres sont alors des droites.

Condition nécessaire et suffisante (Prop. 23).

$$f \text{ diagonalisable} \iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f) = E \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = n,$$

et de même A diagonalisable $\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$.

> La condition suffisante n'est pas nécessaire : I_n est diagonalisable avec une seule valeur propre.