Questions de cours

Révisions d'algèbre linéaire

1 Famille génératrice, libre, base ; polynômes de degrés distincts (Déf. 4, 6, 7, Prop. 4)

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

- **Génératrice :** tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$, i.e. $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
- **Libre :** la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale :
$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$
Elle est **liée** sinon (il existe des λ_i non tous nuls avec $\sum \lambda_i u_i = 0_E$).
- **Base :** famille à la fois libre et génératrice. De façon équivalente : tout vecteur de E s'écrit *de façon unique* comme combinaison linéaire des u_i.

Proposition 4. Une famille de polynômes **non nuls** de **degrés deux à deux distincts** est libre.

> La réciproque est fausse : $(X,\ X+1)$ est libre alors que les deux polynômes ont le même degré.

2 Somme, somme directe ; concaténation de bases ; dimension (Déf. 1, 2, Prop. 3, 4 — réduction)

Soient E un espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- **Somme :** $F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \,;\, (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p\}$ (c'est un sous-espace vectoriel de E).
- **Somme directe :** la somme est directe si tout $x \in F_1 + \cdots + F_p$ s'écrit **de façon unique** $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in F_i$. On note alors $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Proposition 3 (concaténation de bases). On suppose chaque F_i de dimension finie, de base $\mathscr{B}_i$ ($\mathscr{B}_i = \varnothing$ si $F_i = \{0_E\}$), et on note $\mathscr{F}$ la famille obtenue en concaténant $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$. Alors

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \iff E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i.$$

Proposition 4 (dimension). Si $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe et de dimension finie :

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p.$$

3 Matrice d'une application linéaire ; compatibilité avec les opérations (Déf. 17, Prop. 25, 28)

Soient E de dimension p muni d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, F de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Définition. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont la j-ième colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & \cdots & f(e_p) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{matrix}$$

Proposition 25 (combinaisons linéaires). Pour $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f + g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(g), \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(\lambda f) = \lambda \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f).$$

Ainsi $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Proposition 28 (composition $\leftrightarrow$ produit). Si G est muni d'une base $\mathscr{B}_G$, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G, \mathscr{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G, \mathscr{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f).$$

Conséquence : si $\dim E = \dim F$, f est un isomorphisme $\iff$ sa matrice est inversible, et $\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}(f)^{-1}$.

4 Binôme de Newton (Prop. 31)

Si $f, g \in \mathscr{L}(E)$ **commutent** ($f \circ g = g \circ f$), et si $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ **commutent** ($AB = BA$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}, \qquad (A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

L'hypothèse de commutation est indispensable : en général $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Usage typique : $A = I + N$ avec N nilpotente ($N^q = 0$) ; I commute avec tout, et la somme s'arrête à $k = q - 1$.

5 Image, noyau ; caractérisation de l'injectivité (Déf. 20, 21, Prop. 32)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- **Image :** $\mathrm{Im}\, f = f(E) = \{f(x)\,;\, x \in E\}$, sous-espace vectoriel de F. f est surjective $\iff$ $\mathrm{Im}\, f = F$.
- **Noyau :** $\mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E\,;\, f(x) = 0_F\}$, sous-espace vectoriel de E.

Proposition 32. f est injective $\iff$ $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

6 Projection : image, noyau, vecteurs invariants (Déf. 1, Prop. 1 — projecteurs)

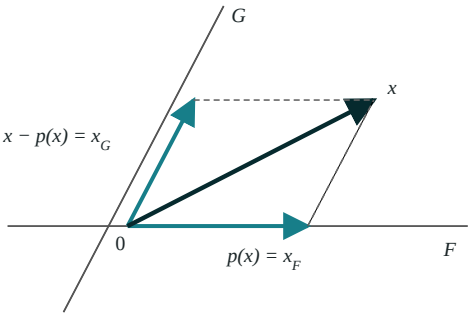
Définition. Soient F, G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \oplus G$. Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$, $x_G \in G$. La **projection sur F parallèlement à G** est

$$p_{F,G} : E \to E, \quad x = x_F + x_G \longmapsto x_F.$$

Proposition 1.

1. $p_{F,G}$ est un endomorphisme de E ;
2. $\operatorname{Im} p_{F,G} = \{x \in E \,;\, p_{F,G}(x) = x\} = F$;
3. $\operatorname{Ker} p_{F,G} = G$.

Donc toute projection p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$, et $p \circ p = p$.



Projection p sur F parallèlement à G : on « descend » sur F en suivant la direction de G.

7 Théorème du rang ; injectivité et surjectivité en même dimension (Prop. 36, 37)

Théorème du rang. Soient E de **dimension finie**, F un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = \dim E, \qquad \text{où } \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f.$$

Proposition 37. Si E et F sont de dimension finie avec $\dim E = \dim F$, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$:

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

> Le théorème du rang ne dit pas que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires (contre-exemple : la dérivation sur $\mathbb{R}_n[x]$, $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_0[x] \subset \operatorname{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[x]$).

8 Formules de changement de base (Déf. 3, Prop. 6, 7 — réduction)

Soient E de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. La **matrice de passage** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$:

$$P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & \cdots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \qquad (\text{inversible, d'inverse } P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}).$$

Vecteur (Prop. 6). Si $X = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors $X = PX'$ (les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles).

Endomorphisme (Prop. 7). Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, alors $A' = P^{-1}AP$.